UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA — P.A. 2017-2
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA — 22/12/2017
DACBHCC

EXAMEN SUSTITUTORIO DE METODOS NUMERICOS (MB536)

- **SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO Y CALCULADORA CIENTIFICA**
- **ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS**
- **PROHIBIDO EL USO DE CELULARES U OTROS EQUIPOS DE COMUNICACION ELECTRONICA**
- **LAS MOCHILAS O MALETINES DEBERÁN DEJARSE EN LA PARTE INFERIOR DE LA PIZARRA**
- **DURACION: 110 MINUTOS**

Problema 1

Una fábrica alquila 6 minutos de la máquina A y 3 minutos de la máquina B por 5 \$. Además alquila 2 minutos de la máquina A y 2 minutos de la máquina B por 3 \$, considerando que el costo de alquiler por minuto de cada máquina es constante, determine lo siguiente:

a) **(0.5 pto)** Plantee el sistema de ecuaciones para hallar el costo por minuto de cada máquina.
b) **(2.0 ptos)** Verifique la convergencia del método de Gauss Seidel para resolver el sistema.
c) **(2.0 ptos)** Estime los costos de alquiler por minuto de cada máquina, usando el método de Gauss-Seidel con 1 iteración, usando como aproximación inicial el costo por minuto de cada máquina de 9\$ y 2\$ respectivamente.
d) **(0.5 pto)** Digite los comandos para hallar la solución exacta con MATLAB.

Problema 2

Sea el sistema de ecuaciones no lineales:

$$\mathbf{1-\alpha = e^{-t_1} - e^{-t_2}}, \quad \boldsymbol{\alpha} \in (\mathbf{0}\ ,\mathbf{1})\ \textbf{Parámetro conocido}$$
$$\mathbf{t_1 e^{-t_1} = t_2 e^{-t_2}}$$

a) **(1pto)** Para $\boldsymbol{\alpha = 0.5}$, represente el sistema no lineal en función F: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, para resolver el problema $\mathbf{F(t)=0}$, y determine el algoritmo de Newton Raphson para este problema.

b) **(2 ptos)** Determine la raíz cercana a $[\mathbf{0}\ \ \mathbf{1}]^T$, usando el algoritmo de Newton-Raphson para sistemas y muestre el error de cada iteración. Realizar tres iteraciones.

c) **(1 pto)** Completar lo que falta en el siguiente código en MATLAB para resolver Newton Raphson para este problema:

```
  alpha = __;
    N   = __;
    x   =[__;__];
for i=1:N
      F =[________;________];
      dF=[____   ____;____   ____];
      x =_______________________;
      err=____________________;
end
```

d) **(1 pto)** Para el sistema de ecuaciones no lineales dado anteriormente**,** justifique si el siguiente arreglo será algoritmo del punto fijo en el punto $[\mathbf{0}\ \ \mathbf{1}]^T$. No realice iteraciones, solo use criterio de convergencia. Comente su respuesta.

$\mathbf{t_1 = t_2 e^{t_1 - t_2}}$; $\mathbf{t_2 = t_1 - ln(1 - 0.5e^{t_1})}$

Ayuda: condición de convergencia: $\|J_G(\mathbf{t})\|_1 < L < 1$,considere el hecho de que la norma es una cota del radio espectral de una matriz.

Problema 3

Dada la Figura adjunta, se pide:

a) **(2 ptos)** Halle el área sombreada usando la cuadratura de Gauss, para n=3.

b) **(1.5 ptos)** Halle el área sombreada usando la fórmula de Simpson 3/8, usando h=1/6.

c) **(0.5 pto)** Si el área exacta es 2.17664299, determine el error para la fórmula de la cuadratura de Gauss y de Simpson 3/8 mencionados en el ítem a) y b) respectivamente.

d) **(1 pto)** Escriba comandos MATLAB para hallar el área sombreada mediante la fórmula abierta usando 10 rectángulos.

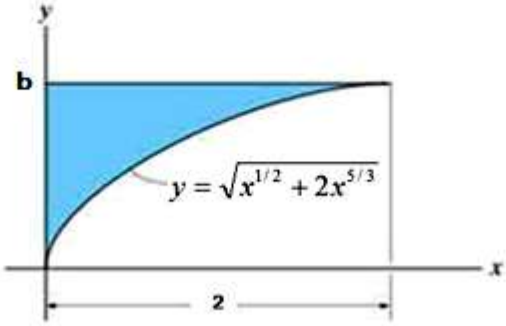

Figura 1

Problema 4

Una plancha de ropa tiene una suela de masa $m = 1{,}75$ Kg con un área expuesta de 0,05 m^2 (denotada por: $A = 0{,}05$). La suela de la plancha está hecha de acero, el cual tiene una capacidad de calor de $450\ \frac{J}{Kg\ °C}$ (denotada por: $C = 450$). , y el coeficiente de transferencia de calor para la conversión de la plancha al aire circundante (el cual está a $T_A = 25^o\ C$) es $20\ \frac{J}{s.m^2.^oC}$ (denotada por: $\alpha = 20$). La plancha tiene una potencia de $150\,W$ ($1W = 1\ \frac{J}{s}$) y está inicialmente a la temperatura del aire.

El proceso término es descrito por el siguiente modelo

$$mC\frac{dT}{dt} = Q_{in} - Q_{out}$$

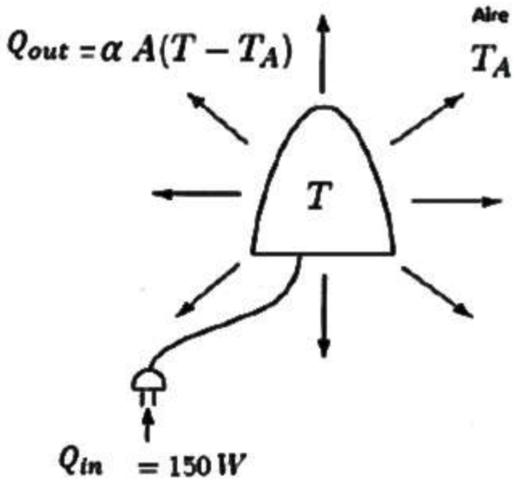

Figura 2

Se pide:

a) **(1 pto)** Plantee el Problema de Valor de Inicial de la forma: $\frac{dT}{dt} = f(t,T)$, considere la temperatura inicial T_0 igual a la temperatura del aire $T_A = 25\ ^oC$.

b) **(0.5 pto)** Si la plancha está enchufada. Halle la temperatura de equilibrio T cuando la salida de energía por convección Q_{out} es igual a la entrada Q_{in}.

c) **(2 ptos)** Mediante Euler, aproxime la Temperatura al cabo de 3 segundos, con incrementos de h=1 seg.

d) **(0.5 pto)** Determine el error porcentual para Temperatura en el último punto si la solución analítica es $T(t) = 175 - 150e^{\frac{-t}{785{,}5}}$. Comente su respuesta.

e) **(1 pto)** Escriba comandos de MATLAB para hallar la solución exacta de la Temperatura.

Los Profesores

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA
DACBHCC

P.A. 2017-2
22/12/2017

Solucionario

Problema 1

Parte a)

Si:

x es el costo de cada minuto de la maquina A

y es el costo de cada minuto de la maquina B

El sistema sería:

6x+3y=5

2x+2y=3

Parte b)

Por simple inspección se verifica que no es estrictamente diagonal dominante, por lo que se debe revisar el radio espectral de T.

$$D = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad L= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T = (D-L)^{-1}U = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.166 & 0 \\ -0.166 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Para hallar los autovalores de T, aplicamos => $|T - \lambda I| = 0$

$$\left| \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0 \qquad \begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\lambda + \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0 \quad \lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda = 0$$

$$\lambda = 0; \frac{1}{2} \qquad Radio\ espectral => \rho(T) = 0.5<1$$

Por lo tanto converge

Parte c)

Hallamos c

$$c = (D-L)^{-1}b = \begin{bmatrix} 0.166 & 0 \\ -0.166 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8333 \\ 0.6666 \end{bmatrix}$$

$$X = TX + c \ => \ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8333 \\ 0.6666 \end{bmatrix}$$

Valor semilla es= > $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \end{bmatrix}$

En la primera iteración:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8333 \\ 0.6666 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1667 \\ 1.6667 \end{bmatrix}$$

Parte d)

```
A=[6 3; 2 2]; b=[5;3]
Solucion=inv(A)*b
```

Problema 2

a)

$$F=\begin{bmatrix}1-\alpha-e^{-t_1}+e^{-t_2}\\ t_1e^{-t_1}-t_2e^{-t_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$t^i=\begin{bmatrix}t_{1i}\\ t_{2i}\end{bmatrix}$$

$$J=\begin{bmatrix}e^{-t_{1i}} & -e^{-t_{2i}}\\ (1-t_{1i})e^{-t1_i} & (t_{2i}-1)e^{-t2i}\end{bmatrix}$$ con i=0,1,2,..

$$F=-\begin{bmatrix}0.5-e^{-t_{1i}}+e^{-t_{2i}}\\ t_{1i}e^{-t_{1i}}-t_{2i}e^{-t_{2i}}\end{bmatrix}$$

$$t^{i+1}=t^i+J^{-1}F$$

b)

t1	t2	err
0	1	1
0.3679	1.6409	0.7389
0.4386	1.9019	0.2704
0.4356	1.9179	0.0163

c)

```
alpha=0.5
N=3;
x=[0;1];
for i=1:N

F =[1-alpha-exp(-x(1))+exp(-x(2));x(1)*exp(-x(1))-x(2)*exp(-x(2))];
dF=[exp(-x(1)) -exp(-x(2));(1-x(1))*exp(-x(1)) (x(2)-1)*exp(-x(2))];
x =x-dF\F
err= norm(dF\F)

end
```

d)

$$J_G=\begin{bmatrix}t_2e^{(t_1-t_2)} & (1-t_2)e^{(t_1-t_2)}\\ 1+0.5e^{t_1}/(1-0.5e^{t_1}) & 0\end{bmatrix}$$

$$J_G([0\quad 1]^t)=\begin{bmatrix}0.3679 & 0\\ 2 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow \left\|J_G([0\quad 1]^t)\right\|=2.3679>1$$

No cumple la condición de convergencia, no se puede decir nada de la convergencia, ya que es una condición necesaria pero no suficiente. Pero considerando los valores propios de la matriz

J_G , la cual tiene un radio espectral de 0.3679 <1 , por lo que se concluye que el método de las aproximaciones sucesivas convergerá.

Problema 3

a) Gauss

$$b = \sqrt{2^{1/2} + 2 * 2^{5/3}} = 2.7864$$

$$I = \int_0^2 b - \sqrt{x^{1/2} + 2x^{5/3}}dx$$

$$f(x) = b - \sqrt{x^{1/2} + 2x^{5/3}}$$

$$x = t + 1$$

$$F(t) = b - \sqrt{(t+1)^{1/2} + 2(t+1)^{5/3}}$$

$$I = 5/9 * F\left(-\sqrt{3/5}\right) + 8/9 * F(0) + 5/9 * F\left(\sqrt{3/5}\right)$$

$$I = 2.167936339414434$$

b) Simpson 3/8

```
h=1/6
Ia=3*h/8*(f(0)+3*f(1/6)+3*f(1/3)+(f(1/2))
Ib=3*h/8*(f(1/2)+3*f(2/3)+3*f(5/6)+(f(1))
Ic=3*h/8*(f(1)+3*f(7/6)+3*f(4/3)+(f(3/2))
Id=3*h/8*(f(3/2)+3*f(5/3)+3*f(11/6)+(f(2))
Is=Ia+Ib+Ic+Id
Is=2.197884114087791
```

c)

Error_Gauss= 0.008706653837437
Error_Simpson38= 0.021241120835921
La Cuadratura de Gauss resulta mas precisa

d)

```
syms x
b=sqrt(2^(1/2)+2*2^(5/3))
f=b-sqrt(x^(1/2)+2*x^(5/3))
h=2/20
x=0:h:2
y=double(subs(f,x))
I=2*h*sum(y(2:2:20))
```

Problema 4

a)

$\frac{dT}{dt} = \frac{175-T}{787,5}$

- $f(t,T) = \frac{175-T}{787,5}$

T(0)=25

b)

$\frac{dT}{dt} = 0$

$\frac{dT}{dt} = \frac{175-T}{787,5}$

$175 - T = 0$

$T = 175$

c) Aplicando Euler:

$t_0 = 0 \quad T_0 = 25 \qquad h = 1$

$T_{n+1} = T_n + hf(t_n, T_n)$

tn	Tn
0	25
1.	25.1905
2.	25.3807
3.	25.5707

c) Texacta = 25.5718
TEuler = 25.5707
ErrorT = 0.004302%

Error de la Temperatura es muy aceptable.

d) MATLAB

X=dsolve('Dx=(175-x)/787.5’,'x(0)=25')